

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2016 – 2017 учебный год

5 – 6 КЛАСС

1. В компании из пяти человек каждый является либо рыцарем, либо лжецом. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда говорят неправду. По вопросу о том, сколько имеется рыцарей в компании, каждый сделал по одному заявлению. Первый сказал, что число рыцарей в компании чётно, второй сказал, что оно нечётно. Третий сказал, что число рыцарей делится на три, четвёртый сказал, что оно не делится на три. Наконец, пятый сказал, что число рыцарей делится на четыре. Можно ли по этим данным однозначно определить, сколько в компании было рыцарей, и сколько лжецов?
2. Два игрока играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой — два камня, а во второй — один камень. У каждого игрока имеется неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок или увеличивает в три раза число камней в какой-либо кучке, или добавляет два камня в одну из куч. Выигрывает тот игрок, после хода которого в обеих кучках в сумме станет не менее 15 камней. Кто выигрывает при правильной игре?
3. Какое наименьшее количество клеток нужно закрасить в квадрате 10×10 , чтобы в каждом квадрате 3×3 была ровно одна закрашенная клетка?
4. Решить числовой ребус $\text{ПИОН} \times 4 = \text{ПОНИ} \times 3$, где разным буквам П, И, О, Н сопоставлены разные цифры. (Оба числа являются четырёхзначными.)
5. На плоскости есть 6 отрезков, никакие два из которых не параллельны. На каждом из этих отрезков отмечены точки пересечения с другими отрезками, при этом никакие три отрезка не пересекаются в одной точке. Известно, что на первом отрезке отмечены 3 точки, на втором 4, ещё на трёх по 5 точек. Сколько точек отмечено на последнем отрезке?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2016 – 2017 учебный год

7 КЛАСС

1. Пятерым детям выдавали конфеты. Сначала первому из них было выдано сколько-то конфет. Потом каждому следующему давали больше, чем предыдущему, с таким расчётом, чтобы дети в любой момент могли разделить поровну все полученные конфеты между теми, кому они на данный момент были выданы. Требуется придумать пример такой раздачи конфет, то есть указать, кому и сколько было выдано, чтобы все указанные свойства выполнялись.
2. В некотором царстве имеется 9 городов. Некоторые из них соединены дорогой (не обязательно прямолинейной). При этом из пяти городов выходит по 4 дороги, а из остальных четырёх городов — по 3 дороги. Может ли быть так, что все эти города нельзя объехать по дорогам, вернувшись назад, и при этом не проезжая несколько раз через один и тот же город? (Дороги в промежуточных точках не могут пересекаться.)
3. Алиса выписывает на доске двузначные числа, причем каждое следующее больше предыдущего, и оно начинается с цифры, на которую заканчивалось предыдущее. Какое максимальное количество чисел может быть выписано на доске?
4. Решить числовой ребус $\text{ПИОН} \times 4 = \text{ПОНИ} \times 3$, где разным буквам П, И, О, Н сопоставлены разные цифры. (Оба числа являются четырёхзначными.)
5. Дан квадрат 4×4 , разбитый на единичные квадратики. В квадратиках разрешается провести одну из диагоналей таким образом, чтобы проведённые линии нигде не пересекались (даже в вершинах). Какое максимальное число диагоналей удастся провести?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2016 – 2017 учебный год

8 КЛАСС

1. Семерым детям выдавали конфеты. Сначала первому из них было выдано сколько-то конфет. Потом каждому следующему давали больше, чем предыдущему, с таким расчётом, чтобы дети в любой момент могли разделить поровну все полученные конфеты между теми, кому они на данный момент были выданы. Требуется придумать пример такой раздачи конфет, то есть указать, кому и сколько было выдано, чтобы все указанные свойства выполнялись.
2. В ряд выстроились 100 человек. Каждый среди них – либо рыцарь, либо лжец. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда говорит неправду. Каждый из них сказал, что левее от него лжецов больше, чем рыцарей правее от него. Сколько в ряду лжецов и сколько рыцарей?
3. Имеется $n \geq 3$ одинаковых шаров и три пронумерованных ящика. Сравнивается число способов разложить шары по ящикам так, чтобы пустых ящиков при этом не оказалось, и число способов разложить шары так, что ровно один из ящиков окажется пустым. При каких значениях n то и другое число способов будет одинаковым?
4. Дан клетчатый прямоугольник 1×2016 . Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За один ход играющий может покрасить клетки какого-то прямоугольника 1×1 , 1×3 или 1×5 клеток (два раза красить одну и ту же клетку нельзя). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от игры соперника?
5. Можно ли нарисовать на плоскости четыре квадрата и две перпендикулярные прямые так, чтобы квадраты не имели общих точек пересечения, и каждая прямая пересекала каждый квадрат по отрезку?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2016 – 2017 учебный год

9 КЛАСС

1. Артур написал на доске некоторое число N и умножил его на каждое из чисел 6, 9 и 13. После этого он обнаружил, что в записи чисел $6N$, $9N$, $13N$ каждая из десяти цифр встречается ровно один раз. Какое число написал Артур?

2. Числа a , b , c неотрицательны. Доказать неравенство

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a + b) + ac(a + c) + bc(b + c).$$

3. В треугольнике ABC угол при вершине A равен 30 градусам, а угол при вершине B равен 80 градусам. Внутри треугольника выбрана точка M такая, что треугольник BCM является правильным. Найти величину угла MAB .
4. Числа 1, 2, ..., 50 разбили на 10 пятёрок, и в каждой пятёрке взяли среднее по величине число. Взятые 10 чисел просуммировали. Какое наименьшее и какое наибольшее значение при этом могло получиться?
5. Найти площадь выпуклого многоугольника с вершинами в точках, координаты $(x; y)$ которых являются целочисленными решениями уравнения $17x + 45 = 17y + 5xy$.

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2016 – 2017 учебный год

10 КЛАСС

1. Уравнение $(x + 3a)(x + 3b) = 25$ имеет корень $x = a + b$. Доказать, что $ab \leq 1$.
2. Имеется строго возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Известно, что для любого k от 1 до n сумма первых k членов этой последовательности делится на k . Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности?
3. Четырехзначное число делится на 9, и сумма его тысяч и сотен в два раза меньше суммы цифр десятков и единиц. Сколько существует таких чисел? Каковы минимальное и максимальное из них?
4. Окружности ω_1 и ω_2 , радиусы которых равны 9 и 16 соответственно, касаются друг друга внешним образом в точке A . На окружности ω_1 выбрана точка B на расстоянии 9 от A . Из этой точки проведена касательная к окружности ω_2 . Найти длину отрезка касательной.
5. Имеется доска 40×40 , клетки которой раскрашены в шахматном порядке, и много бумажных полосок, состоящих из пяти клеток того же размера, что и клетки доски. Каким наименьшим количеством полосок можно накрыть все белые клетки доски (полоски могут перекрываться и вылезать за край доски)?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2016 – 2017 учебный год

11 КЛАСС

1. Придумать пример функции $f(x)$, определённой на всей числовой прямой, для которой выполняется тождество

$$f(2x + 1) + f(3x - 2) = x^2 + x + 1.$$

2. Имеется строго возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Известно, что для любого k от 1 до n сумма первых k членов этой последовательности делится на k . Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности?
3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла опущена высота CH . В треугольники ACH и BCH вписаны окружности; O_1 и O_2 — их центры; P_1 и P_2 — их точки касания с AC и BC . Доказать, что прямые O_1P_1 и O_2P_2 пересекаются на гипотенузе AB .
4. Решить в целых числах уравнение $2x^2 = 3y^2 + 5xy + x + 4y + 20$.
5. В состязании принимает участие 2016 школьников. В каждом раунде все школьники делятся на две команды, с равным количеством участников. Найти минимальное число происходящих раундов, чтобы любые два школьника по крайней мере в одном раунде были в разных командах.

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35